ÉNONCÉ

Évaluation Terminale spé maths — ln, exp, fonctions, récurrence

Durée : 2 heures · Calculatrice autorisée · Noté sur 20 points (4 exercices de 5 points).

Toutes les réponses doivent être justifiées. La qualité de la rédaction et la rigueur des raisonnements entrent dans la note. Aucune limite n'est demandée dans ce sujet.

Nom : ..... Prénom : .....

Exercice 1 — Équations et inéquations (5 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes. Pour celles qui contiennent un logarithme, on commencera par déterminer l'ensemble sur lequel on travaille.

1. e^(2x − 1) = 3
2. ln(x + 2) = ln(3x − 4)
3. ln(x) + ln(x − 1) = ln(6)
4. e^(2x) − 4e^x + 3 = 0 (on pourra poser X = e^x)
5. ln(2x − 1) ≤ 0
6. 2e^x − 7 < 3

Exercice 2 — Étude d'une fonction composée avec ln (5 points)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 2x - 3\right)$$

1. Étudier le signe de $x^2 - 2x - 3$ selon les valeurs de x. En déduire que l'ensemble de définition de f est D = $]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[$.
2. Rappeler la formule de la dérivée de ln(u) où u est une fonction dérivable et strictement positive. Montrer que, pour tout x de D, $f'(x) = (2x - 2) / (x^2 - 2x - 3)$.
3. Étudier le signe de f′(x) sur chacun des intervalles de D.
4. Dresser le tableau de variations de f (sans les limites).
5. Résoudre dans D l'équation f(x) = ln(5).
6. Résoudre dans D l'équation f(x) = 0. On donnera les valeurs exactes des solutions, puis on vérifiera qu'elles appartiennent bien à D.

Exercice 3 — Démonstrations par récurrence (5 points)

Les trois questions sont indépendantes. Chaque démonstration doit faire apparaître clairement l'initialisation, l'hérédité et la conclusion.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n ≥ 1 :

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, le nombre $4^n + 2$ est divisible par 3.
3. Soit a un réel strictement positif. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $(1 + a)^n \geq 1 + na$ (inégalité de Bernoulli).

Exercice 4 — Problème : fonction, suite et récurrence (5 points)

On considère la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln(x)$.

Partie A — Étude de fonctions

1. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $[1 ; +\infty[$.
2. Calculer $f(1)$. En déduire que, pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq 1$.
3. On pose, pour tout $x \geq 1$, $\varphi(x) = 1 + \ln(x) - x$.
4. Calculer $\varphi'(x)$ et étudier son signe sur $[1 ; +\infty[$.
5. Dresser le tableau de variations de φ et calculer $\varphi(1)$.
6. En déduire que, pour tout $x \geq 1$, $f(x) \leq x$.

Partie B — Étude d'une suite

On définit la suite (u_n) par $u_0 = e$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n) = 1 + \ln(u_n)$.

1. Calculer u_1 et u_2 (valeurs exactes).
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = e^{(u_{n+1} - 1)}$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
4. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ? (On ne demande pas d'étudier sa limite.)
