ÉNONCÉ

Évaluation — Probabilités conditionnelles

Première — spécialité mathématiques · Durée : 1 h · Calculatrice autorisée · Noté sur 20

Nom : …… Prénom : …… Classe : ……

Les résultats sont donnés sous forme de fractions irréductibles ou de décimaux arrondis à 10^{-3}. Toute réponse doit être justifiée ; la qualité de la rédaction est prise en compte.

Notations : $\bar{M}$ désigne l'événement contraire de M ; $P_A(B)$ désigne la probabilité de B sachant A.

Exercice	Thème	Points
1	Tableau croisé d'effectifs	6
2	Arbre pondéré	6
3	Probabilités et second degré	8

Exercice 1 — Choix de spécialités (6 points)

On a interrogé les 500 élèves de première d'un lycée sur leurs spécialités. On note :

- M : « l'élève suit la spécialité mathématiques » ;
- P : « l'élève suit la spécialité physique-chimie ».

On dispose du tableau d'effectifs incomplet suivant.

	P	$\bar{P}$	Total
M	180		300
$\bar{M}$		170	
Total	210		500

1. Recopier et compléter le tableau. *(1,5 pt)*
2. On choisit un élève au hasard parmi les 500. Calculer $P(M)$ puis $P(M \cap P)$. *(1 pt)*
3. Calculer $P_M(P)$, puis interpréter ce résultat par une phrase. *(1 pt)*
4. L'élève choisi suit la spécialité physique-chimie. Quelle est la probabilité qu'il suive aussi la spécialité mathématiques ? *(1 pt)*
5. Les événements M et P sont-ils indépendants ? Justifier. *(1 pt)*
6. Calculer $P(M \cup P)$. *(0,5 pt)*

Exercice 2 — Le trajet de Léo (6 points)

Chaque matin, Léo se rend au lycée soit en bus, soit à vélo.

- Il prend le bus avec une probabilité de 0,65 ; sinon, il prend son vélo.
- Lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard avec une probabilité de 0,2.
- Lorsqu'il prend son vélo, il arrive en retard avec une probabilité de 0,08.

On choisit un matin au hasard et on note B : « Léo prend le bus », V : « Léo prend son vélo » et R : « Léo arrive en retard ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation. *(1 pt)*
2. Calculer $P(B \cap R)$. *(0,5 pt)*
3. Montrer que $P(R) = 0{,}158$. *(1 pt)*
4. Ce matin, Léo est arrivé en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le bus ? *(1 pt)*
5. Un autre matin, Léo est arrivé à l'heure. Quelle est la probabilité qu'il soit venu à vélo ? *(1 pt)*
6. Les événements B et R sont-ils indépendants ? Justifier. *(0,5 pt)*
7. Le réseau de bus améliore sa ponctualité. On note x la nouvelle probabilité que Léo soit en retard lorsqu'il prend le bus ; les autres données sont inchangées. Déterminer x pour que la probabilité que Léo arrive en retard soit égale à 0,1. *(1 pt)*

Exercice 3 — Le jeu de la kermesse (8 points)

À un stand de kermesse, on dispose d'une pièce truquée qui tombe sur Pile avec une probabilité x, où x est un réel de l'intervalle $]0\,;\,1[$. Le jeu se déroule ainsi :

- le joueur lance la pièce une première fois ;
- s'il obtient Pile, il relance la pièce : il gagne s'il obtient de nouveau Pile ;
- s'il obtient Face, il tire une carte dans un paquet : il gagne si la carte est gagnante, ce qui arrive avec une probabilité de 0,4.

On note A : « le premier lancer donne Pile » et G : « le joueur gagne ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation, en fonction de x. *(1 pt)*
2. Montrer que $P(G) = x^2 - 0{,}4x + 0{,}4$. *(1 pt)*

On note f la fonction définie sur $]0\,;\,1[$ par $f(x) = x^2 - 0{,}4x + 0{,}4$.

3. a. Déterminer la forme canonique de $f(x)$. *(1 pt)* b. En déduire la valeur de x pour laquelle le jeu est le moins favorable au joueur, ainsi que la probabilité de gagner correspondante. *(1 pt)*
4. L'organisateur souhaite que la probabilité de gagner soit égale à 0,52. Déterminer la valeur de x correspondante. *(1,5 pt)*
5. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la probabilité de gagner est supérieure ou égale à 0,45. *(1,5 pt)*
6. Dans cette question, $x = 0{,}6$. Un joueur a gagné. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu Pile au premier lancer ? *(1 pt)*
